Løsningsforslag til obligatorisk oppgave 3
INF1800 Logikk og beregnbarhet, høsten 2009

Torgeir Lebesbye
torgeirl@ifi.uio.no
Universitetet i Oslo

Lars-Erik Bruce
larsereb@ifi.uio.no
Universitetet i Oslo

19. oktober 2009

Oppgave 1 (Pumpelemmaet)

Vis at følgende språk ikke er regulære.

a. $\mathbf{A_1 = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}}$

Vi antar at A_1 er regulært. Da må det finnes en endelig automat med m tilstander som godtar alle strenger i A_1. Strengen $0^m 1^m$ er en del av A_1, og siden vi har m antall 0, må automaten ha gått i en løkke for å lese denne delstrengen. Vi vet at hvis man har gått i en løkke i en endelig automat, skal vi kunne gå denne løkken om igjen. Derfor kan vi pumpe opp delstrengen, for eksempel med n som er større enn null. Da skal resultatet bli godkjent av samme regulære automat. Resultatet blir her $0^{m+n}1^m$, som ikke er en del av språket A_1. Altså kan A_1 ikke være et regulært språk.

b. $\mathbf{A_2 = \{0^m 1^n \mid n > m > 0\}}$

Vi antar at A_2 er regulært. Da må det finnes en endelig automat med m tilstander som godtar alle strenger i A_2. Strengen $0^m 1^{m+n}$ er også en del av A_2, og siden vi har m antall 0, må automaten ha gått i en løkke for å lese denne delstrengen. Vi vet at hvis man har gått i en løkke i en endelig automat, skal vi kunne gå denne løkken om igjen. Derfor kan vi pumpe opp delstrengen, for eksempel med o som er større enn n. Da skal resultatet bli godkjent av samme regulære automat. Resultatet blir her $0^{m+o}1^{m+n}$, som ikke er en del av språket A_2. Altså kan A_2 ikke være et regulært språk.

c. $\mathbf{A_3}$ **= {ww | w er fra (a+b)*}**

Vi antar at A_3 er regulært. Da må det finnes en endelig automat med m tilstander som godtar alle strenger i A_3. Strengen $a^m b a^m b$ er også en del av A_3, og siden vi har m antall a, må automaten ha gått i en løkke for å lese denne delstrengen. Vi vet at hvis man har gått i en løkke i en endelig automat, skal vi kunne gå denne løkken om igjen. Derfor kan vi pumpe opp delstrengen, for eksempel med n som er større enn null. Da skal resultatet bli godkjent av samme regulære automat. Resultatet blir her $a^{m+n}ba^mb$, som ikke er en del av språket A_3. Altså kan A_3 ikke være et regulært språk.

d. A_4 = {ww^R | w er fra (a+b)* og w^R er den omvendte strengen av w}

Vi antar at A_4 er regulært. Da må det finnes en endelig automat med m tilstander som godtar alle strenger i A_4. Strengen a^mbba^m er også en del av A_4, og siden vi har m antall a, må automaten ha gått i en løkke for å lese denne delstrengen. Vi vet at hvis man har gått i en løkke i en endelig automat, skal vi kunne gå denne løkken om igjen. Derfor kan vi pumpe opp delstrengen, for eksempel med n som er større enn null. Da skal resultatet bli godkjent av samme regulære automat. Resultatet blir her $a^{m+n}bba^m$, som ikke er en del av språket A_4. Altså kan A_4 ikke være et regulært språk.

Oppgave 2 (PDA og CFG)

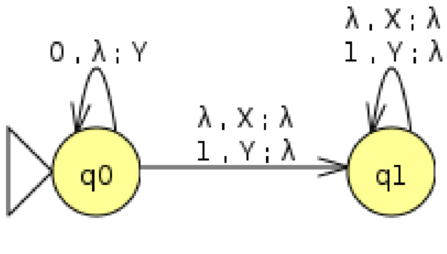
Lag PDA og CFG for A_1 og A_2, og enten A_3 eller A_4.

$A_1 = \{0^n1^n \mid n \geq 0\}$

Dette språkets strenger består av et antall 0-ere etterfulgt av like høyt antall 1-ere. Siden n kan være null vil den minste strengen være Λ, så start vil kunne lede direkte til Λ.

$S \rightarrow 0S1 \mid \Lambda$

En deterministisk PDA for A_1 som aksepterer ved empty stack. Automaten starter med en X på stacken.



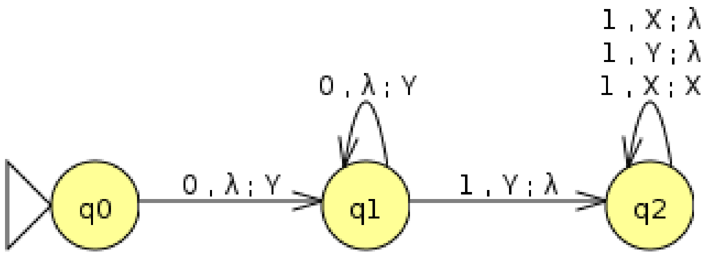
$A_2 = \{0^m1^n \mid n > m > 0\}$

Dette språkets strenger består av et antall 0-ere etterfulgt av et høyere antall 1-ere. Verken n eller m kan være null, så den minste strengen vil være 011.

S → 0T11

T → 0T1 | T1 | Λ

En nondeterministisk PDA for A_2 som aksepterer ved empty stack. Automaten starter med en X på stacken.



PDAen er nondeterministisk fordi den etter å ha lest $m + 1$ 1-ere har to transisjoner for når den leser 1 og X er det øverste symbolet på stacken.

A_3 = {ww | w er fra (a+b)*}

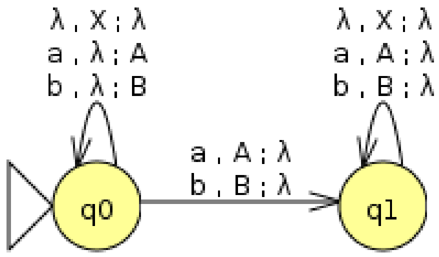
Dette språket er kontekstsensitivt, og det lar seg derfor ikke beskrive med en kontekstfri grammatikk og en push-down automat vil ikke kunne akseptere språkets strenger.

A_4 = {ww^R | w er fra (a+b)* og w^R er den omvendte strengen av w}

Dette språkets strenger er partalls lange palindromer, altså Λ, *aa*, *bb*, *aaaa*, *abba*, *baab bbbb*, osv.

S → aSa | bSb | Λ

En nondeterministisk PDA for A_4 som aksepterer ved empty stack. Automaten starter med en X på stacken.



PDAen er nondeterministisk siden overgangen mellom w og w^R ikke lar seg avgjøre deterministisk.

Oppgave 3 (Sekventkalkyle i utsagnslogikk)

Gi en oversettelse av utsagnene.

1. P(aris) → F(rankrike)
2. L(ondon) → E(ngland)
3. P → E
4. L → F

For følgende utsagn bruk sekventkalkyle til å gi enten en falsifikasjon eller vis at det er gyldig.

MERK: I en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ tolker jeg Γ og Δ som mengder, og ikke multimengder. Dette har ingen praktisk betydning da flere av samme uttrykk på en side av sekventtegnet ikke endrer hvorvidt noe er et aksiom eller gir en falsifikasjon.

a. 1 ∧ 2 → 3 ∨ 4

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\bullet}{P \to F, E, L, P \vdash E, F} \qquad \overset{\bullet}{P \to F, L, P \vdash E, F, L}}{P \to F, L \to E, L, P \vdash E, F}\,\text{L}\to}{P \to F, L \to E, L \vdash P \to E, F}\,\text{R}\to}{P \to F, L \to E \vdash P \to E, L \to F}\,\text{R}\to}{(P \to F) \land (L \to E) \vdash P \to E, L \to F}\,\text{L}\land}{(P \to F) \land (L \to E) \vdash (P \to E) \lor (L \to F)}\,\text{R}\lor}{\vdash ((P \to F) \land (L \to E)) \to ((P \to E) \lor (L \to F))}\,\text{R}\to$$

Det finnes ingen kombinasjon av valuasjoner som kan falsifisere formelen og den er derfor gyldig. QED.

b. 1 ∧ 3 → 2 ∨ 4

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\bullet}{P \to F, E, L \vdash E, F} \qquad \dfrac{\overset{\bullet}{F, L \vdash E, F, P} \qquad \overset{\circ}{L \vdash E, F, P}}{P \to F, L \vdash E, F, P}\,\text{L}\to}{P \to F, P \to E, L \vdash E, F}\,\text{L}\to}{P \to F, P \to E, L \vdash L \to E, F}\,\text{R}\to}{P \to F, P \to E \vdash L \to E, L \to F}\,\text{R}\to}{(P \to F) \land (P \to E) \vdash L \to E, L \to F}\,\text{L}\land}{(P \to F) \land (P \to E) \vdash (L \to E) \lor (L \to F)}\,\text{R}\lor}{\vdash ((P \to F) \land (P \to E)) \to ((L \to E) \lor (L \to F))}\,\text{R}\to$$

Vi ser at formelen kan falsifiseres for valuasjonene v(L) = 1, v(E) = 0, v(F) = 0, og v(P) = 0.

$((P \to F) \land (P \to E)) \to ((L \to E) \lor (L \to F))$

$((0 \to 0) \land (0 \to 0)) \to ((1 \to 0) \lor (1 \to 0))$

$(1 \land 1) \to (0 \lor 0)$

$1 \to 0$

0

QED.

c. 3 ∧ 4 → 1 ∨ 2

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\overset{\bullet}{P \to E, F, L, P \vdash F, E}$}
\AxiomC{$\overset{\bullet}{P \to E, L, P \vdash F, E, L}$}
\RightLabel{L$\to$}
\BinaryInfC{$P \to E, L \to F, L, P \vdash F, E$}
\RightLabel{R$\to$}
\UnaryInfC{$P \to E, L \to F, L \vdash P \to F, E$}
\RightLabel{R$\to$}
\UnaryInfC{$P \to E, L \to F \vdash P \to F, L \to E$}
\RightLabel{L$\land$}
\UnaryInfC{$(P \to E) \land (L \to F) \vdash P \to F, L \to E$}
\RightLabel{R$\lor$}
\UnaryInfC{$(P \to E) \land (L \to F) \vdash (P \to F) \lor (L \to E)$}
\RightLabel{R$\to$}
\UnaryInfC{$\vdash ((P \to E) \land (L \to F)) \to ((P \to F) \lor (L \to E))$}
\end{prooftree}
$$

Det finnes ingen kombinasjon av valuasjoner som kan falsifisere formelen og den er derfor gyldig. QED.

d. 1 ∨ 2 → 3 ∨ 4

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\overset{\bullet}{F, L, P \vdash E, F}$}
\AxiomC{$\overset{\bullet}{L, P \vdash E, F, P}$}
\RightLabel{L$\to$}
\BinaryInfC{$P \to F, L, P \vdash E, F$}
\AxiomC{$\overset{\bullet}{E, L, P \vdash E, F}$}
\AxiomC{$\overset{\bullet}{L, P \vdash E, F, L}$}
\RightLabel{L$\to$}
\BinaryInfC{$L \to E, L, P \vdash E, F$}
\RightLabel{L$\lor$}
\BinaryInfC{$(P \to F) \lor (L \to E), L, P \vdash E, F$}
\RightLabel{R$\to$}
\UnaryInfC{$(P \to F) \lor (L \to E), L \vdash P \to E, F$}
\RightLabel{R$\to$}
\UnaryInfC{$(P \to F) \lor (L \to E) \vdash P \to E, L \to F$}
\RightLabel{R$\lor$}
\UnaryInfC{$(P \to F) \lor (L \to E) \vdash (P \to E) \lor (L \to F)$}
\RightLabel{R$\to$}
\UnaryInfC{$\vdash ((P \to F) \lor (L \to E)) \to ((P \to E) \lor (L \to F))$}
\end{prooftree}
$$

Det finnes ingen kombinasjon av valuasjoner som kan falsifisere formelen og den er derfor gyldig. QED.

e. 1 $\land$ 2 $\to$ 3 $\land$ 4

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\bullet}{P \vdash E, L, P} \qquad \overset{\circ}{F, P \vdash E, L}}{P \to F, P \vdash E, L} \qquad \overset{\bullet}{P \to F, E, P \vdash E}}{P \to F, L \to E, P \vdash E}}{P \to F, L \to E \vdash P \to E}\,\mathrm{R}{\to} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\bullet}{L \vdash F, P, L} \qquad \overset{\circ}{E, L \vdash F, P}}{L \to E, L \vdash F, P} \qquad \overset{\bullet}{F, L \to E, L \vdash F}}{P \to F, L \to E, L \vdash F}}{P \to F, L \to E \vdash L \to F}\,\mathrm{R}{\to}}{P \to F, L \to E \vdash (P \to E) \land (L \to F)}\,\mathrm{R}{\land}}{(P \to F) \land (L \to E) \vdash (P \to E) \land (L \to F)}\,\mathrm{L}{\land}}{\vdash ((P \to F) \land (L \to E)) \to ((P \to E) \land (L \to F))}\,\mathrm{R}{\to}
$$

Vi ser at formelen kan falsifiseres for valuasjonene v(F) = 1, v(P) = 1, v(E) = 0, og v(L) = 0 eller v(E) = 1, v(L) = 1, v(F) = 0, og v(P) = 0. Jeg tar utgangspunkt i den først falsifikasjonen, $F, P \vdash E, L$.

$((P \to F) \land (L \to E)) \to ((P \to E) \land (L \to F))$

$((1 \to 1) \land (0 \to 0)) \to ((1 \to 0) \land (0 \to 1))$

$(1 \land 1) \to (0 \land 1)$

$1 \to 0$

0

QED.